

# Cours de bases de données, <http://sql.bdpedia.fr>

Quelques notions de logique

# Notions élémentaires de logique formelle

Cette session présente les notions essentielles de logique formelle à connaître :

- Le calcul propositionnel : valeurs de vérité et formules
- Les prédicats
- Collections et quantificateurs
- Importance pour les bases de données et SQL

Ces diapositives correspondent au support en ligne disponible sur le site <http://sql.bdpedia.fr/>

# Calcul propositionnel

**Proposition** : énoncé auquel on peut affecter deux valeurs de vérité, Vrai ou Faux.

**Formule** : expression basée sur des propositions et leur combinaison par des **connecteurs logiques**.

- la conjonction, notée  $\wedge$
- la disjonction, notée  $\vee$
- la négation, notée  $\neg$

Exemple :  $(p \wedge q) \vee r$

# Valeur de vérité d'une formule

Induite à partir de valeurs de vérité des propositions, et des règles suivantes :

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$
Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
Vrai	Faux	Faux	Vrai	Faux
Faux	Vrai	Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Faux	Faux	Vrai

Exemple :  $(p \wedge q) \vee r$  est Vrai pour les valeurs V, V, F de  $p, q, r$

# Equivalences

Un informaticien averti sait manier avec agilité les équivalences. Quelques exemples.

- $\neg(\neg F)$  est équivalente à  $F$
- $F \vee (F_1 \wedge F_2)$  est équivalente à  $(F \vee F_1) \wedge (F \vee F_2)$  (distribution)
- $F \wedge (F_1 \vee F_2)$  est équivalente à  $(F \wedge F_1) \vee (F \wedge F_2)$  (distribution)
- $\neg(F_1 \wedge F_2)$  est équivalente à  $(\neg F_1) \vee (\neg F_2)$  (loi DeMorgan)
- $\neg(F_1 \vee F_2)$  est équivalente à  $(\neg F_1) \wedge (\neg F_2)$  (loi DeMorgan)

Donc  $p \vee \neg(p \wedge \neg q)$  est une **tautologie**.

# Prédicats

Extension puissante des propositions : **construire des énoncés sur des "objets"**.

Le prédicat  $Compose(X, Y)$  permet de construire des énoncés de la forme :

- $Compose('Mozart', 'Don Giovanni')$
- $Compose('Debussy', 'La mer')$
- Etc.

Ce sont des nuplets (ou des atômes, ou des faits).

- Il en existe une infinité
- Un **contexte** (ou "interprétation") définit ceux qui sont vrais / faux.

## Remarque: Base de données ?

C'est un contexte donnant un ensemble fini de faits vrais.

Tous les autres sont considérés comme faux.

# Nuplets ouverts et fermés

Un nuplet énoncé avec des constantes est un nuplet **fermé**.

*Compose('Mozart', 'Don Giovanni')*

Un nuplet énoncé avec au moins une variable est un nuplet **ouvert**.

*Compose(X, 'Don Giovanni')*

Un nuplet ouvert désigne une infinité de faits possibles.

## Remarque: Interêt ?

En général on s'intéresse aux valeurs de  $X$  pour lesquelles les faits sont vrais. **On a effectué une requête.**

# Collections et quantificateurs

Les nuplets libres expriment des contraintes sur un fait.

On peut exprimer des contraintes sur des collections de faits avec les quantificateurs.

- $\exists xP(x)$  est vraie s'il existe **au moins** une affectation de  $x$  pour laquelle  $P(x)$  est vraie.
- $\forall xP(x)$  est vraie si  $P(x)$  est vraie pour **toutes** les valeurs de  $x$ .

**Variables libres et liées** : une variable quantifiée est liée ; sinon elle est libre.

# SQL = formules logique

Requête SQL = une formule avec des variables libres.

Résultat d'une requête = les valeurs des variables libres qui satisfont la formule.

La formule  $Compose(X, 'Don Giovanni')$  s'écrit en SQL

```
select compositeur
  from Compose
  where oeuvre='Don Giovanni'
```

SQL c'est une syntaxe pour écrire des formules.

Remarque: Déclarativité

On ne dit pas comment on calcule !

# Exemples

Deux relations/prédicats :

- Expert (id\_expert, nom)
- Manuscrit (id\_manuscrit, auteur, titre, id\_expert, commentaire)

$Manuscrit(\_, 'Proust', t, x, \_) \wedge Expert(x, n)$

```
select titre, nom from Expert, Manuscrit
where Expert.id_expert = Manuscrit.id_expert
and auteur = 'Proust'
```

$Expert(x, n) \wedge \exists Manuscrit(\_, 'Proust', \_, x, \_)$

```
select nom from Expert as e
where exists (select * from Manuscrit as m
              where e.id_expert = m.id_expert
              and auteur = 'Proust')
```

# À retenir

SQL est un langage **déclaratif** qui exprime par une formule logique les propriétés du résultat à construire.

Avantages prouvés et éprouvés depuis les années 1970.

- signification précise, non ambiguë
- algorithmes efficaces
- langage robuste, universellement connu et adopté, **normalisé**
- **déclarativité** : SQL ne donne aucune indication sur la manière dont le système doit trouver le résultat.